побудову та використання цих матриць, ми можемо отримати глибше розуміння властивостей і поведінки графів і застосувати ці знання до широкого кола проблем.

Список літератури

1. *Матриця суміжності та її побудова, URL:* https://studfile.net/preview/5740186/page:3/
2. *Застосування матриць суміжності, URL:* https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/35854/1/Teoriia_hrafiv.pdf
3. *Матриця відстані у теорії графів, URL:* https://en.wikipedia.org/wiki/Distance_matrix
4. *Практичне застосування матриць відстаней, URL :* https://www.displayr.com/what-is-a-distance-matrix/

УДК 004.6

Дорофєєв Є.О студент 1 курсу
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
Науковий керівник:
Гончар В.М., асистент кафедри
інформаційних технологій

АЛГОРИТМИ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРОСПОЛУЧЕННЯ У ДВУДОЛЬНИХ ГРАФАХ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Один з ключових питань у теорії графів - це знаходження оптимальних паросполучень у двудольних графах. Двудольні графи є особливими, оскільки їх вершини можна розділити на дві неперетинаючіся множини або "долі". Знаходження оптимального паросполучення полягає у знаходженні найбільшої множини ребер, які не мають спільних вершин та з'єднують вершини з однієї долі з вершинами з іншої долі.

Для вирішення цієї задачі розроблено кілька алгоритмів, серед яких одним з найвідоміших є алгоритм Унгарія, також відомий як алгоритм Куна. Цей алгоритм заснований на теорії матричних ігор та використовує метод пошуку шляхів з покращеннями.

Основна мета алгоритму Унгарія - знайти оптимальне паросочетання в біпартитному графі з мінімальною вагою або максимальним ваговим покриттям. Цей алгоритм заснований на використанні теорії графів та методів лінійного програмуваннях[1].

Опис алгоритму Унгарія:

1. Створити двовимірну матрицю розміром $n * n$, де n - кількість вершин у кожній з двох ділянок біпартитного графа. Заповнити матрицю вагами або вартостями ребер графа.
2. Знайти мінімальний елемент у кожному рядку матриці і відняти його від усіх елементів цього рядка. Результат називається зведеною матрицею.
3. Знайти мінімальний елемент у кожному стовпці зведеної матриці і відняти його від усіх елементів цього стовпця. Результат називається збалансованою зведеною матрицею.
4. Знайти оптимальне паросполучення у збалансованій зведеній матриці. Це можна зробити за допомогою рекурсивного або ітеративного пошуку.
5. Якщо знайдене паросполучення не максимальне, то провести "покриваючий" тест, щоб знайти непокриті ребра і додати до них мінімальну непокриту вагу. Повторювати кроки 2-4, поки не буде знайдено максимальне паросполучення.
6. Перетворити знайдене паросполучення в оптимальний план присвоєння. Це можна зробити шляхом вибору по одному ребру з кожного рядка так, паросполучення щоб в кожному стовпці було вибрано лише одне ребро. Отримана комбінація ребер утворює оптимальне паросполучення.
7. Якщо вихідний граф не є повним, то можна додати фіктивні вершини та ребра з нульовими вагами, щоб зробити його повним.

Алгоритм Унгарія гарантує знаходження оптимального паросполучення з мінімальною вагою або максимального вагового покриття у біпартитних графах. Він має часову складність O(n^3), де n - кількість вершин у графі. Алгоритм також може бути застосований до задачі асигнування, де кількість вершин у двох ділянках не співпадає, але вимагає деяких модифікацій.

Алгоритм Унгарія знайшов широке застосування в оптимізаційних задачах, таких як присвоєння ресурсів, транспортна логістика, планування та інші області, де потрібно знайти оптимальну комбінацію між двома множинами елементів.

Крім алгоритму Унгарія, існує інший популярний алгоритм - алгоритм Хопкрофта-Карпа, який також знаходить оптимальне паросполучення у двудольних графах. Цей алгоритм базується на розбитті вершин графа на рівні та використовує техніку пошуку в ширину.

Агоритм Хопкрофта-Карпа - це ефективний алгоритм для знаходження максимального паросполучення в двудольному графі. Паросполуення в графі - це набір ребер, в якому кожна вершина має максимум одне інцидентне ребро.

Алгоритм Хопкрофта-Карпа базується на ідей поліпшення алгоритму Бержа за допомогою розбиття графа на рівні. Він був запропонований у 1973 році Джоном Хопкрофтом та Річардом Карпом [2].

Ось основні кроки алгоритму Хопкрофта-Карпа:

1. Ініціалізація: Створіть порожнє паросполучення і встановіть мітки рівнів для кожної вершини в графі.

2. Побудова рівнів: Використовуючи пошук в ширину (BFS), побудуйте рівні вершин у графі. Почніть з однієї з долей і йдіть по ребрах, позначаючи вершини на наступному рівні.
3. Насичення паросполучення: Для кожної вершини у першій долі спробуйте знайти розширювальний ланцюжок - шлях, який починається і закінчується на ненасичених вершинах і чергується між ребрами в паросполученні та не паро сполученні .Якщо розширювальний ланцюжок знайдено, змініт паросполучення, додавши або видаливши ребра, що відповідають цьому ланцюжку.
4. Повторення: Повторюйте кроки 2 та 3, доки є можливість знайти розширювальні ланцюжки та насичувати паросполучення .
5. Повернення результату: Після завершення алгоритму буде знайдене максимальне, паросполучення і ви можете повернути його як результат.

Зробимо такий висновок,що алгоритм Хопкрофта-Карпа є одним з найефективніших алгоритмів для вирішення задачі знаходження максимального паросполучення в двудольному графі. Він широко використовується в різних додатках , таких як пошук оптимальних у великих мережах, використання в теорії графів та комбінаториці, а також в алгоритмах зіставлення та розподілу ресурсів.

Отже,обидва алгоритми, Унгарія і Хопкрофта-Карпа, є потужними інструментами для знаходження оптимального паросполучення у двудольних графах. Вибір конкретного алгоритму залежить від розміру графа, кількості ребер та вимог до продуктивності.

Ці алгоритми можуть бути застосовані до двудольних графів для знаходження оптимального паросполучення. Вибір конкретного алгоритму залежить від наших потреб та характеристик графа, таких як розмір, структура та ваги ребер[3].

Знаходження оптимального паросполучення має широкі застосування у різних областях, включаючи розкладання завдань, проблеми назначення, аналіз мереж та вирішення задач подружжя, де важливо знайти найбільшу множину зв'язків без перетину вершин. Алгоритми Унгарія і Хопкрофта-Карпа є потужними інструментами, які допомагають розв'язати цю задачу ефективно та точно.

Список літератури

1. *"Introduction to Algorithms" by Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein.*
2. *"Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications" by Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin.*
3. *Matching Theory" by László Lovász and Michael D. Plummer.*