

*Ярош О. Л., студент 1 курсу спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» СО Магістр  
Бабаков Р. М., д.т.н, доцент,  
доцент кафедри інформаційних технологій*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ТРИВАЛОСТІ ОПТИМІЗАЦІЇ ВІД РОЗМІРНОСТІ ЗАДАЧІ**

*Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця*

Вимірність оптимізаційної задачі суттєво впливає на часову складність та тривалість обчислень алгоритмів оптимізації. Цей взаємозв'язок, відомий як прокляття розмірності, є невід'ємним аспектом оптимізації. Оптимізація є важливим аспектом багатьох наукових і технологічних галузей, включаючи машинне навчання, дослідження операцій та економіку. Ці проблеми часто пов'язані з набором змінних і обмежень, з метою знайти найкраще рішення. Одним з основних факторів, що впливають на час обчислень або тривалість оптимізації, є розмірність задачі, тобто кількість змінних, що беруть участь у процесі оптимізації. Цей зв'язок між розмірністю та часом обчислень часто називають "прокляттям розмірності" - поняття, введене Річардом Беллманом у 1957 році.

Прокляття розмірності - це експоненціальне зростання обчислювальної складності при збільшенні кількості вимірів (змінних) в оптимізаційній задачі. Простіше кажучи, коли задача стає більш багатовимірною, розмір простору пошуку зростає в геометричній прогресії, що ускладнює пошук оптимального рішення. У просторах високої розмірності кількість можливих рішень зростає експоненціально, що робить методи вичерпного перебору обчислювально нездійсненними. Наприклад, у лінійному програмуванні часова складність симплекс-методу зростає експоненціально зі збільшенням розміру задачі. Аналогічно, для задач комбінаторної оптимізації, таких як задача комівояжера, часова складність зростає в геометричній прогресії зі збільшенням розміру задачі. Прокляття розмірності також з'являється в машинному навчанні, де високорозмірні набори даних часто призводять до перенавчання і тривалого часу навчання. У просторах високої розмірності дані стають розрідженими, а значущі закономірності стає важче розпізнати, що робить процес навчання складнішим.

Збільшенню тривалості оптимізації сприяють кілька факторів:

- **Обсяг пошукового простору:** Об'єм простору пошуку зростає експоненціально зі збільшенням розмірності. Як наслідок, зі збільшенням розмірності стає все важче знайти глобальний оптимум.

- Локальні оптимуми: Простори високої розмірності часто містять багато локальних оптимумів. Алгоритми, які покладаються на градієнт або локальну інформацію, можуть застрягти в цих локальних оптимумах і не знайти глобальний оптимум.
- Розрідженість вибірки: Високимірні задачі оптимізації страждають від проблеми розрідженості. Зі збільшенням розмірності кількість вибірок, необхідних для адекватного покриття простору пошуку, зростає експоненціально, що призводить до розрідженості вибірки.

Існує кілька стратегій для пом'якшення прокляття розмірності в задачах оптимізації:

- Зменшення розмірності. Одним із поширених підходів є зменшення розмірності проблеми за допомогою таких методів, як аналіз головних компонент (PCA), t-SNE та автокодерів. Ці методи спрямовані на те, щоб спроектувати багатовимірні дані в простір меншої розмірності, зберігаючи при цьому якомога більше структури та взаємозв'язків вихідних даних.
- Спрощення задачі. Інший підхід полягає у спрощенні проблеми шляхом прийняття певних припущень або використання евристик. Наприклад, жадібні алгоритми часто спрощують складні оптимізаційні задачі, роблячи локально оптимальний вибір на кожному кроці, з надією, що ці локальні оптимуми приведуть до глобального оптимуму.
- Регуляризація. У машинному навчанні методи регуляризації, такі як регресія Лассо та регресія Риджа, використовуються для запобігання надмірному пристосуванню до багатовимірних даних. Регуляризація додає штраф до функції втрат, ефективно зменшуючи складність моделі.
- Розширені методи оптимізації. Передові методи оптимізації, такі як стохастичний градієнтний спуск, генетичні алгоритми та імітаційне відпалювання, призначені для вирішення проблем високої розмірності краще, ніж традиційні алгоритми оптимізації. Ці алгоритми включають випадковість та евристичні правила для ефективної навігації в просторі пошуку.
- Розширені методи оптимізації. Передові методи оптимізації, такі як стохастичний градієнтний спуск, генетичні алгоритми та імітаційне відпалювання, призначені для вирішення проблем високої розмірності краще, ніж традиційні алгоритми оптимізації. Ці алгоритми включають випадковість та евристичні правила для ефективної навігації в просторі пошуку.

Взаємозв'язок між розмірністю оптимізаційної задачі та тривалістю оптимізації є фундаментальним аспектом оптимізації. Незважаючи на те, що прокляття розмірності створює значні проблеми, було розроблено кілька методів і стратегій для ефективного управління проблемами високої розмірності.

Оскільки ми рухаємося до світу, де все більше уваги приділяється даним, і де проблеми високої розмірності є скоріше нормою, ніж винятком, розуміння і подолання прокляття розмірності буде мати першорядне значення.

#### Список літературних джерел

1. *Bellman, R. (1957). Dynamic Programming. Princeton University Press.*
2. *Wolpert, D. H., & Macready, W. G. (1997). No free lunch theorems for optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation.*
3. *Duda, R. O., Hart, P. E., & Stork, D. G. (2001). Pattern Classification (2nd ed.). Wiley.*