УДК 004.6

Семенюк А. М., студент 2 курсу спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»
Науковий керівник:
Потапова Н. А., к.е.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій

ЗОЛОТИЙ ПЕРЕТИН ТА ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

"Є в математиці щось, що викликає людський захват", – цей вислів німецького математика Фелікса Гаусдорфа найбільш точно характеризують пошану математиків, архітекторів, митців до "Золотої пропорції" та "Чисел Фібоначчі".

1.Золотим перетином відрізка називається поділ його точкою на дві нерівні частини таким чином, щоб відношення усього відрізка до більшої частини дорівнювало відношенню більшої частини до меншої, тобто

$$r = \frac{b-a}{b-c} = \frac{b-c}{c-a} \quad (1)$$

де

$[a, b]$ – відрізок;

c – точка поділу

r – число, яке називають "золотим перетином" (відношенням), його значення

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034 \quad (2)$$

2. Числа (послідовність) Фібоначчі, це лінійна послідовність натуральних чисел, де перше і друге дорівнюють нулю та одиниці, а кожне наступне – сумі двох попередніх: 0, 1, 1, 2, 3, 5, … Відношення двох сусідніх чисел у послідовності прямує до "золотого перетину".

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \mid n > 2, a_1 = 0, a_2 = 1 \quad (3)$$

Шляхетність назви цих понять передається в можливостях, які розкриваються при використанні цих методів в чисельних розрахунках. Значна частина прикладних завдань пов'язана з методами оптимізації. Серед них, метод оптимізації, що застосовується при вирішенні завдань, пов'язаних із знаходженням мінімумів функцій.

Пошук екстремуму функцій – основна, базова задача лінійного програмування. Найбільш широко використовуваний при цьому метод, це симплекс-метод – метод направленого перебору суміжних вершин в напрямі зростання цільової функції. Хоча задача пошуку точки екстремуму функції однієї змінної інколи має і самостійне значення, та найчастіше вона є допоміжною при розв'язанні складніших задач математичного програмування.

Отже, розглянемо нелінійну неперервну функцію *f(x)* однієї змінної $x \in R$. Задача одновимірної оптимізації полягає в знаходженні точки $x^* \in R$, у якій функція *f(x)* приймає мінімальне значення. Найбільш простий та популярний метод для вирішення цієї задачі це метод дихотомії. Недоліком половинного поділу є те, що на кожній ітерації методу значення цільової функції *f(x)* потрібно обчислювати у двох точках x_{i1} , x_{i2} , що є суттєвим при обрахунку на ПК складних функцій, так як кожне обчислення функції ***f(x)*** вимагає значних обчислювальних витрат. Цей недолік усувається при використанні метода "золотого перерізу".

Мета перетину зводиться до того, що відрізок [a, b], де існує один мінімум функції, розбивається на три неоднакових частини (рис.1) у відповідності до співвідношення:

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{c-a}{d-a} = \frac{b-d}{b-c} = \frac{b-c}{b-a} \tag{4}$$

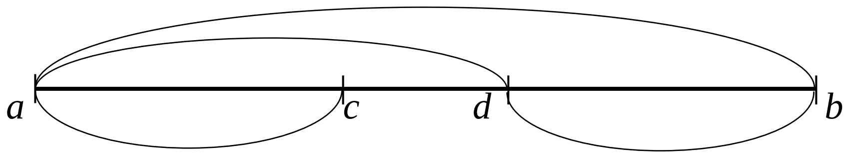

Рис. 1 – Приклад розбиття відрізку

Як видно з (4) точки ***c*** і *d* знаходяться на однаковій відстані від країв заданого відрізка. Якщо прийняти:

$$\lambda = \frac{d-a}{b-a}, 0 < \lambda < 1 \; \Rightarrow \; \frac{\lambda}{1} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \Rightarrow \tag{5}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \; \lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

На початку $[a_0, b_0] = [a, b]$, а на і-му кроці отримуємо $[a_i, b_i]$, які отримуємо з відношень:

$$x_{i1} = a_i + (1-\lambda)(b_i - a_i) \tag{6}$$

$$x_{i2} = a_i + \lambda(b_i - a_i)$$

якщо $f(x_{i1}) \; < \; f(x_{i2})$

$$a_{i+1} = a_i \, , \; b_{i+1} = x_{i2} \, , \; x_{i2} = x_{i1} \, , \; x_{i1} = a_{i+1} + (1-\lambda)(b_{i+1} - a_{i+1}) \tag{7}$$

інакше

$$a_{i+1} = x_{i1} \, , \; b_{i+1} = b_i \, , \; x_{i1} = x_{i2} \, , \; x_{i2} = a_{i+1} + \lambda(b_{i+1} - a_{i+1})$$

Отже, при прорахунку наступних ітераційних точок обчислюється лише одна точка. Точність знаходження результату $\boldsymbol{\varepsilon}$ визначає кількість кроків ітерації.

Метод чисел Фібоначчі спрощує початковий етап до вибору числа що умову:

$$F_n = \frac{b-a}{\varepsilon} \tag{8}$$

Далі, обчислюються значення в точках $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$:

$$x_{i1} = a_i + \frac{F_{n-2}(b_i - a_i)}{F_n} \quad (9)$$

$$x_{i2} = a_i + \frac{F_{n-1}(b_i - a_i)}{F_n}$$

якщо $$f(x_{i1}) < f(x_{i2})$$

$$a_{i+1} = a_i\,,\ b_{i+1} = x_{i2}\,,\ x_{i2} = x_{i1}\,,\ x_{i1} = a_i + \frac{F_{n-3}(b_i - a_i)}{F_{n-1}} \quad (10)$$

інакше

$$a_{i+1} = x_{i1}\,,\ b_{i+1} = b_i\,,\ x_{i1} = x_{i2}\,,\ x_{i2} = a_i + \frac{F_{n-2}(b_i - a_i)}{F_{n-1}}$$

Далі виконується перехід до наступного кроку.

При обчислені за методом "чисел Фібоначчі", так само як за методом "золотого перетину" достатньо вираховувати одну точку наступної ітерації, в так само дії продовжуємо до тих пір, поки довжина інтервалу невизначеності не стане меншою заданої точності обчислень.

Отже, що ми отримуємо:

– за рахунок меншої кількості обчислень значень функції ***f(x)***, розглянуті процеси виявляються ефективнішим при розв'язанні практичних задач, та належать до методів 0-го порядку;

– метод "чисел Фібоначчі" є найкращим (в сенсі максимального зменшення довжини відрізка локалізації) серед активних методів пошуку;

– метод "золотого перетину" є одним з найпростіших обчислювальних методів.

Ці методи є одними з основних і простих методів рішення задач оптимізації і математичного програмування. На теперішній час вони представляють собою одні з найважливіших розділів оптимізації і широко використовується для рішення багатьох задач в різних областях науки і техніки.

Список літератури:

1. Клочко О.В., Клочко В.І., Потапова Н.А. Методи оптимізації в економіці: навчальний посібник. Вінниця: Вінницька газета, 2013. 456 с.

2. Львіцина С.А. Застосування методу "золотий перетин" в управлінні прибутком будівельного підприємства. Ефективна економіка. 2010. № 9. URL: http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=303

3. Офіційний сайт Adobe. Ознайомлення з золоттим перетином. URL: https://www.adobe.com/ua/creativecloud/design/discover/golden-ratio.html