УДК: 004.9

Дорофєєв Є. О., *здобувач 2 курсу спеціальності 122 Комп'ютерні науки, науковий керівник:*
Потапова Н. А., *канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій*

ПОРІВННЯ МЕТОДІВ ДИХТОМІЇ ТА ІТЕРАЦІЇ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

У світі числових методів для знаходження розв'язків рівнянь і оптимізаційних задач існує цілий арсенал інструментів, серед яких особливе місце займають метод дихотомії та метод ітерації. Вони допомагають нам вирішувати складні математичні проблеми, розглядаючи їх з різних поглядів та застосовуючи різні стратегії. Метод дихотомії і метод ітерації – це числові методи для знаходження наближеного розв'язку рівнянь або оптимізаційних задач. Перший базується на послідовному діленні інтервалу, другий – на ітеративному застосуванні перетворення до початкового наближення. Метод дихотомії гарантує збіжність, але може бути повільним, тоді як метод ітерації може збігатися швидше, але потребує добре обраного початкового наближення. Метод дихотомії ще називають методом половинного поділу. Під час розв'язання нелінійного рівняння методом половинного поділу задаються відрізок [a,b], на якому існує лише один розв'язок, і бажана точність $e > 0$ розв'язання задачі. Розглянемо алгоритм цього методу:

Нехай дано рівняння $f(x) = x\hat{}3 - 3x\hat{}2 + 24x + 10$. Необхідно знайти його корінь з точністю e на відрізку [0,1], на якому функція безперервна і у кінцях має значення різних знаків, тобто $f(a) \times f(b) < 0$. Отже, згідно з теоремою 1, на цьому відрізку існує хоча б один розв'язок рівняння.

Знаходиться середина відрізку [a,b] – точка c (рис. 1). Корінь може опинитись на відрізку [a,c] або на [c,b], чи співпасти з c. В останньому випадку метод припиняє роботу, інакше за допомогою перевірки виконання умов $f(a) \times f(c) < 0$і $f(c) \times f(b) < 0$ з'ясовується, на якій частині відрізку залишився корінь. Далі процедура повторюється для тієї половини відрізку, на якій є корінь, доки відрізок не зменшиться настільки, що його довжина буде менше від заданої похибки [1].

Алгоритм методу:

Крок 1. Знаходиться середина відрізка c: = (b+a)/2.

Крок 2. Перевіряються такі умови:

1) якщо $f(c) = 0$ – корінь знайдено;

2) якщо $f(a) \times f(c) < 0$ – корінь на [a,c], тому b:=c;

3) якщо $f(c) \times f(b) < 0$ – корінь на [c,b], тому a:=c.

Крок 3. Перевіряється умова b–a. Якщо вона виконується, то корінь знайдено. В цьому випадку він дорівнює (a+b)/2. Інакше повертаються до кроку 1.

y=x^3-3x^2+24x+10 e=0,5*10^-6 [-1,0]

№	f(a)	a	f(b)	b	c	f©	e	f(a)*f©	f©*f(b)
0	-18	-1	10	0	-0,5	-2,875	-1	51,75	-28,75
1	-2,875	-0,5	10	0	-0,25	3,796875	-0,5	-10,91601563	37,96875
2	-2,875	-0,5	3,796875	-0,25	-0,375	0,525391	-0,25	-1,510498047	1,994843
3	-2,875	-0,5	0,5253906	-0,375	-0,4375	-1,15796	-0,125	3,32913208	-0,60838
4	-1,157958984	-0,4375	0,5253906	-0,375	-0,40625	-0,31216	-0,0625	0,361473463	-0,16401
5	-0,312164307	-0,40625	0,5253906	-0,375	-0,390625	0,107632	-0,03125	-0,03359877	0,056549
6	-0,312164307	-0,40625	0,1076317	-0,390625	-0,398438	-0,10201	-0,01563	0,031843959	-0,01098
7	-0,10201025	-0,398438	0,1076317	-0,390625	-0,394531	0,002875	-0,00781	-0,000293234	0,000309
8	-0,10201025	-0,398438	0,0028746	-0,394531	-0,396484	-0,04955	-0,00391	0,005054798	-0,00014
9	-0,049551867	-0,396484	0,0028746	-0,394531	-0,395508	-0,02333	-0,00195	0,001156276	-6,7E-05
10	-0,023334664	-0,395508	0,0028746	-0,394531	-0,39502	-0,01023	-0,00098	0,000238692	-2,9E-05
11	-0,010229058	-0,39502	0,0028746	-0,394531	-0,394775	-0,00368	-0,00049	3,76123E-05	-1,1E-05
12	-0,003677003	-0,394775	0,0028746	-0,394531	-0,394653	-0,0004	-0,00024	1,47508E-06	-1,2E-06
13	-0,000401162	-0,394653	0,0028746	-0,394531	-0,394592	0,001237	-0,00012	-4,96122E-07	3,55E-06
14	-0,000401162	-0,394653	0,0012367	-0,394592	-0,394623	0,000418	-6,1E-05	-1,67597E-07	5,17E-07
15	-0,000401162	-0,394653	0,0004178	-0,394623	-0,394638	8,31E-06	-3,1E-05	-3,33318E-09	3,47E-09
16	-0,000401162	-0,394653	8,309E-06	-0,394638	-0,394646	-0,0002	-1,5E-05	7,8799E-08	-1,6E-09
17	-0,000196427	-0,394646	8,309E-06	-0,394638	-0,394642	-9,4E-05	-7,6E-06	1,84757E-08	-7,8E-10
18	-9,40588E-05	-0,394642	8,309E-06	-0,394638	-0,39464	-4,3E-05	-3,8E-06	4,03277E-09	-3,6E-10
19	-4,2875E-05	-0,39464	8,309E-06	-0,394638	-0,394639	-1,7E-05	-1,9E-06	7,41013E-10	-1,4E-10
20	-1,72831E-05	-0,394639	8,309E-06	-0,394638	-0,394639	-4,5E-06	-9,5E-07	7,75519E-11	-3,7E-11
21	-4,48715E-06	-0,394639	8,309E-06	-0,394638	-0,394638	1,91E-06	-4,8E-07	-8,57414E-12	1,59E-11
22	-4,48715E-06	-0,394639	1,911E-06	-0,394638	-0,394638	-1,3E-06	-2,4E-07	5,7802E-12	-2,5E-12
23	-1,28817E-06	-0,394638	1,911E-06	-0,394638	-0,394638	3,11E-07	-1,2E-07	-4,01041E-13	5,95E-13
24	-1,28817E-06	-0,394638	3,113E-07	-0,394638	-0,394638	-4,9E-07	-6E-08	6,29166E-13	-1,5E-13
25	-4,8842E-07	-0,394638	3,113E-07	-0,394638	-0,394638	-8,9E-08	-3E-08	4,32479E-14	-2,8E-14

Рис. 1. Метод дихотомії

Метод дихотомії має малу швидкість збіжності, оскільки інтервал, де знаходиться корінь, з кожним кроком зменшується не більше, ніж удвічі.

Метод ітерації, також відомий як метод простої ітерації або метод змінних точок, є числовим методом для розв'язання рівнянь або систем рівнянь. Він використовується для знаходження наближеного розв'язку рівняння шляхом послідовного покращення початкового наближення.

Основна ідея методу полягає в тому, щоб взяти початкове наближення до розв'язку і використовувати ітераційний процес для покращення цього наближення, поки не буде досягнута необхідна точність або максимальна кількість ітерацій [2].

Припустимо, що корінь $x*$ рівняння $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 + 24\mathrm{x} + 10$ знаходиться на відрізку [a,b] (рис. 2). Тоді алгоритм розв'язку рівняння методом простої ітерації такий:

Згідно з методом простої ітерації, задане рівняння $f(x) = f(x) = x^3 - 3x^2 + 24x + 10$ замінюють функцією $\varphi(x)$, де $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, a – дійсна стала $(\lambda \neq 0)$, і обчислюють ітерації $xn + 1 = \varphi(xn)$.

Алгоритм методу:

1. Виокремлюють корні рівняння на відрізку ізоляції (будь-яким із методів).
2. Перевіряють умови застосування методу (знаки похідних).
3. Проводять пошук заміни $\varphi i(x) = x - \lambda i\, f(x)$ для кожного з відрізків i = 1, 2… і визначають λ.
4. Проводять розрахунки для відрізка (відрізків) ізоляції з урахуванням λ [3].

Отже, зробимо висновок, що методи дихотомії та ітерації є широко використовуваними алгоритмами для знаходження нуля (або кореня) функції. Ось деякі плюси та мінуси кожного з цих методів.

Метод дихотомії:

1. Плюси:

- простий у реалізації;
- гарантовано збігається до кореня функції, якщо вона є неперервною та має змінний знак на кінцях вибраного інтервалу;
- має стабільну збіжність, навіть за невеликої точності обчислень.

2. Мінуси:

- потребує великої кількості ітерацій для досягнення високої точності, особливо для функцій з малою швидкістю збіжності;
- неефективний для функцій з великими коливаннями або нерівномірним розподілом коренів на заданому інтервалі.

y=x^3-3x^2+24x+10
y'=3x^2-6x+24
y"=6x-6

x	y(x)	y'=f(x)	y"=f(x)
-10	-1530	384	-66
-9	-1178	321	-60
-8	-886	264	-54
-7	-648	213	-48
-6	-458	168	-42
-5	-310	129	-36
-4	-198	96	-30
-3	-116	69	-24
-2	-58	48	-18
-1	-18	33	-12
0	10	24	-6
1	32	21	0
2	54	24	6
3	82	33	12
4	122	48	18
5	180	69	24
6	262	96	30
7	374	129	36
8	522	168	42
9	712	213	48
10	950	264	60

f'(a)	33
f'(b)	24
Max(abs)	33

№	x	f(x)	L
0	-1	-18	0,030303
1	-0,454545	-1,62284	
2	-0,405368	-0,288426	
3	-0,396628	-0,053416	
4	-0,39501	-0,009963	
5	-0,394708	-0,001861	
6	-0,394651	-0,000348	
7	-0,394641	-6,49E-05	
8	-0,394639	-1,21E-05	
9	-0,394638	-2,27E-06	
10	-0,394638	-4,23E-07	
11	-0,394638	-7,91E-08	
12	-0,394638	-1,48E-08	

Рис. 2. Метод простої ітерації

Метод ітерації:

1. Плюси:

- швидше збігається до кореня, особливо порівняно з методом дихотомії;
- ефективний для функцій зі складними формами або з низькою швидкістю збіжності;
- дає змогу обчислення похідних функції, що може прискорити збіжність.

2. Мінуси:

- вимагає обчислення похідних функції, що може бути витратним процесом;
- не завжди гарантує збіжність, особливо якщо похідна змінює знак близько до кореня або функція має особливості;
- метод може розбігатися, якщо похідна змінює знак недалеко від кореня.

Вибір між цими методами залежить від конкретного завдання, типу функції та потрібної точності.

Список використаних джерел

1. Чисельні методи: навчальний посібник / Л. О. Волонтир, О. В. Зелінська, Н. А. Потапова, І. А. Чіков. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с.

2. Швець Х. І., Потапова Н. А. Уточнення наближених розв'язків методом простої ітерації. *Прикладні інформаційні технології:* матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів, аспірантів та молодих вчених (м. Вінниця, 22 квітня 2022 р.). Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2022. С. 44–46. URL: https://jait.donnu.edu.ua/article/view/12252

3. Павлов Д. Л., Потапова Н. А. Використання методу дихотомії для розв'язку прикладних задач. *Прикладні інформаційні технології:* матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів, аспірантів та молодих вчених (м. Вінниця, 22 квітня 2022 р.). Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2022. С. 26–28. URL: https://jait.donnu.edu.ua/article/view/12244

УДК 530.145(075.8)

Діброва І. С., *здобувач 2 курсу спеціальності 122 Комп'ютерні науки,*
науковий керівник:
Потапова Н. А., *канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій*

КВАНТОВІ ОБЧИСЛЕННЯ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Не відстаючи від швидкого розвитку технологій і науки, зростає попит на більш досконалі обчислювальні системи. Традиційні комп'ютери досягли своїх обмежень, коли справа доходить до вирішення складних завдань, що вимагає дослідження нових підходів до обчислень. Квантові обчислення пропонують багатообіцяльне рішення, яке використовує принципи квантової механіки для вирішення цільових проблем з більшою швидкістю та ефективністю [1].

Одним з основних завдань квантових обчислень є розробка та реалізація алгоритмів і технологій, які використовують квантові властивості матеріалів для вирішення обчислювальних завдань, складних для вирішення традиційними комп'ютерами. Це включає пошук нових квантових алгоритмів, розробку квантового апаратного забезпечення та дослідження можливості застосування квантових обчислень у різних галузях науки й техніки, від криптографії до матеріалознавства [2].

Квантові комп'ютери відрізняються від традиційних транзисторних комп'ютерів тим, що тоді, коли класичні комп'ютери працюють з використанням даних, закодованих у двійкових числах (бітах), коли квантовий комп'ютер використовує кванти, кожне число завжди знаходиться в одному з двох станів (0 або 1). Біти (кубіти) можуть перебувати в суперпозиції станів.

Теоретично квантові комп'ютери здатні вирішувати певні проблеми швидше, ніж класичні комп'ютери, як-от факторизація цілих чисел або проблема ефективного моделювання квантових систем багатьох тіл. Існує багато квантових алгоритмів, як-от алгоритм Шора, алгоритм Саймона та інші, які виконуються за набагато менший час, ніж будь-який класичний імовірнісний алгоритм [3].