Відокремити корінь рівняння – означає знайти такий інтервал, в середині якого є корінь даного рівняння, і цей корінь – єдиний на даному інтервалі. Алгоритм відокремлення коренів розбивається на такі кроки:

1. Розбивається деяка область на деяку кількість рівних відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, де x_0 задано, $x_{i+1} = x_i + h$, h– крок розбиття, $i = 0, \dots, n$.

2. Визначається знак функції $f(x)$ на кінцях кожного i-го відрізка $[x_i, x_{i+1}]$.

3. Якщо добуток $f(x_i)f(x_{i+1})$ доданий і h достатньо мале, то можна сподіватися, що на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ коренів рівняння немає.

4. Якщо добуток $f(x_i)f(x_{i+1})$ від'ємний, то на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ існує розв'язок рівняння, хоча можливо, що він не один.

5. Перевіряється, чи змінює знак похідна $f'(x)$ на кінцях відрізка $[x_i, x_{i+1}]$. Якщо h достатньо мале і знак похідної $f'(x)$ на кінцях відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ не змінюється, то можна сподіватися, що на відрізку корінь один. Отже, корінь рівняння відокремлений.

6. Якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється, то впевненості, що корінь один, немає.

7. Відрізки, для яких немає упевненості в тому, що розв'язок рівняння лише один, продовжують розбивати вже з меншим кроком, тобто повторюється для них описана процедура відокремлення коренів.

Отже, відокремлення коренів є початковим кроком під час наближеного аналізу нелінійних рівнянь, розв'язок яких далі потребує використання методів, якот метод дихотомії, ітерації, хорд, дотичних.

Список використаних джерел

1. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / Р. Н. Квєтний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софина, О. М. Шушура. Вінниця: ВНТУ, 2012. 193 с. URL: http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/kmsp.pdf

2. Чисельні методи: навчальний посібник / Л. О. Волонтир, О. В. Зелінська, Н. А. Потапова, І. А. Чіков. Вінниця: ВНАУ. 2020 322 с.

УДК 004.6

Богач Т. О., *здобувачка 2 курсу*
спеціальності 122 Комп'ютерні науки,
Поремський Ю. В., *канд. техн. наук,*
старший викладач кафедри
інформаційних технологій

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ВИРІШЕННІ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

У сучасному світі чисельні методи роблять значний внесок у розв'язання різноманітних задач, від фінансового моделювання до складних інженерних розрахунків та задач комп'ютерних наук. Серед цих задач розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) має особливе місце, адже воно є фундаментом для багатьох галузей науки та техніки. Ітераційний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) є потужним інструментом для пошуку наближених розв'язків. Він відрізняється від прямого методу тим, що починається з наближеного правильного розв'язку і, якщо обчислювальний процес збігається, після кожного кроку буде отримано послідовність наближених розв'язків, що стають усе ближче до справжнього після кожного кроку [1].

Під час розв'язування СЛАР виникає проблема знаходження балансу між обчислювальною складністю і точністю розв'язку. Існують прямі методи, які можуть забезпечити точний розв'язок СЛАР за обмежену кількість часу, але вони не ефективні для великих систем або складних структур. З іншого боку, ітераційні методи на основі повторних обчислень можуть бути ефективними для великих СЛАР, але збіжність цих методів вимагає більше часу і може бути менш стійкою. Отже, необхідно знайти оптимальний баланс між точністю, швидкістю та обчислювальною складністю для розв'язування СЛАР у чисельних обчисленнях. Це вимагає розробки та застосування різних методів залежно від конкретної задачі і вимог.

Ефективні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) мають велике значення у багатьох областях науки та техніки, включно з фінансовою математикою, інженерією та комп'ютерними науками.

- Фінансова математика виникла в середині 1980-х років, коли дослідники математики зацікавилися проблемами, пов'язаними зі стохастичним керуванням, які до того часу вивчалися переважно економістами. Ця область використовує квантитативні методи для вирішення завдань, як-от ціноутворення фінансових інструментів, включно деревовими методами, скінченними різницями для рівнянь з частинними похідними та методом Монте-Карло [2].
- У сучасному інженерному світі, де моделювання складних систем, обробка сигналів та аналіз даних відіграють ключову роль у проєктуванні та розробці, ефективні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) стають невід'ємною частиною успіху. Математичні концепції та інструменти, як-от інтеграл, алгебра та статистика, дають змогу інженерам робити точні розрахунки та вимірювання, зменшуючи ризик помилок у проєктуванні та аналізі [3].
- У комп'ютерних науках, де чисельні методи є розповсюдженими для розв'язання різних задач як оптимізації програм, так і обробки великих обсягів даних, ефективні методи розв'язання СЛАР є важливим елементом для розробки швидких та ефективних алгоритмів. Чисельні методи, включно з ітераційними методами, є важливим інструментом у комп'ютерних науках. Вони використовуються для розв'язання СЛАР, оптимізації, обробки зображень, машинного навчання та багатьох інших завдань.

Здійснимо огляд різних підходів до побудови ітераційних методів, як-от метод Якобі, метод Гауса–Зейделя, метод релаксації.

Метод ітерації – це чисельний і наближений метод розв'язання СЛАР. Основна ідея ітераційних методів полягає в тому, щоб знайти за наближеним значенням величини наступного наближення, яке є точнішим. Тобто зближаються до точного розв'язку з кожною ітерацією. Цей процес триває доти, поки розв'язок не зблизиться до потрібної точності або не буде досягнута максимальна кількість ітерацій. Метод дає змогу отримати значення коренів системи із заданою точністю у вигляді межі послідовності деяких векторів (ітераційний процес). Характер збіжності і сам факт збіжності методу залежить від вибору початкового наближення кореня x_0 [4].

Метод Якобі – один з ітераційних методів наближення розв'язку системи n лінійних рівнянь у n змінних. Ітераційний метод Якобі розглядається як ітераційний алгоритм, який використовується для визначення розв'язків системи лінійних рівнянь у чисельній лінійній алгебрі, яка є діагонально домінуючою. У цьому методі для кожного діагонального елементу підставляється наближене значення. Поки воно не збігається, процес повторюється. Цей алгоритм був вперше названий процесом перетворення Якобі під час діагоналізації матриці. Метод Якобі також відомий як метод одночасних зсувів [5]:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1;$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{nn}x_n = b_n.$$

У методі Гауса–Зейделя кожна змінна оновлюється на основі найновіших значень інших змінних. Ця модифікація часто призводить до вищого ступеня точності за меншу кількість ітерацій. У методі Якобі значення змінних не змінюються до наступної ітерації, тоді як у методі Гаусса–Зейделя значення змінних змінюються, як тільки оцінюється нове значення. Наприклад, у методі Якобі значення $x_i(k)$ не змінюється до $(k + 1)$ ітерації, а в методі Гаусса–Зейделя значення $x_i(k)$ змінюється лише в k-й ітерації [6].

Ітераційні методи широко використовуються в різних галузях, включно з фінансовою математикою, обробкою сигналів, машинним навчанням та ін.

- Фінансова математика. У фінансовій математиці ітераційні методи використовуються для оцінки ціни фінансових інструментів, як-от опціони та деривативи. До прикладу, методи релаксації можна використовувати для розрахунку цін опціонів або моделювання ризику у фінансових портфелях.
- Обробка сигналів. В обробці сигналів ітераційні методи використовуються для вирішення проблем фільтрації та відновлення сигналів. До прикладу, методи Гаусса–Зейделя можна використовувати для реконструкції зображень або фільтрації сигналів у медичній діагностиці.
- Машинне навчання. У машинному навчанні ітераційні методи використовуються для навчання моделей та оптимізації параметрів. До прикладу, метод стохастичного градієнтного спуску – це ітераційний метод, який використовується для оптимізації ваг моделей у задачах класифікації та регресії.

Ітераційні методи розв'язання лінійних алгебраїчних систем рівнянь мають переваги перед прямими методами. Вони є ефективними для великих систем, оскільки вимагають менше обчислювальних ресурсів і працюють із матрицями у вигляді векторно-матричних операцій. Багато ітераційних методів можна розпаралелити, що дає змогу використовувати паралельні обчислення для прискорення процесу розв'язання системи лінійних рівнянь (СЛАР) на багатоядерних і розподілених системах. Ітераційні методи допускають різні модифікації та оптимізації для збільшення швидкості збіжності або врахування специфічних характеристик завдання. Вони також можуть бути ефективними для розв'язування невизначених або погано обумовлених систем. До того ж ітераційні методи мають застосовність до складних проблем, де прямі методи можуть бути непрактичними або неефективними. Загалом ітераційні методи забезпечують більшу гнучкість, адаптивність і потенціал для розв'язання різних типів лінійних алгебраїчних систем рівнянь.

Ітераційні методи мають свої переваги, проте вони також мають обмеження, які треба враховувати під час їх використання. Деякі ітераційні методи можуть бути нестійкими за певних умов, що призводить до повільної або відсутньої збіжності, якщо початкове наближення вибрано неправильно або система має особливості. До того ж методи можуть вимагати додаткових обчислень або збереження додаткових даних, що призводить до збільшення обчислювальних витрат та вимог до пам'яті. Ефективність ітераційних методів також може залежати від вибору початкового наближення, і неправильний вибір може призвести до повільної збіжності чи навіть до розбіжності методу. Деякі ітераційні методи можуть проявляти нестабільність під час обчислення, особливо якщо матриця системи має аномалії або втрату точності.

Отже, ітераційні методи є потужним інструментом для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Їх використання поширене у різних галузях, як-от фінансова математика, обробка сигналів та машинне навчання. Основні переваги ітераційних методів полягають у здатності працювати з великими і розрідженими матрицями, економії пам'яті та можливості паралельного обчислення. Проте важливо враховувати обмеження цих методів, як-от нестійкість у певних умовах, потреба в додаткових даних та обмежена працездатність для деяких типів систем. У майбутньому дослідження в цій галузі можуть спрямовуватися на поліпшення ефективності, стійкості та швидкості збіжності ітераційних методів. Це може бути досягнуто через розробку нових методів або оптимізацію наявних, використання специфічних властивостей систем та покращення алгоритмів паралельних обчислень. Також можливе дослідження нових застосувань ітераційних методів для розв'язання конкретних задач у різних галузях, що сприятиме подальшому розвитку цієї важливої галузі чисельних обчислень.

Список використаних джерел

1. Елементи комп'ютерного моделювання. Лекція № 9. Ітераційні та прямі методи. *Кафедра обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.* URL: http://om.univ.kiev.ua/users_upload/15/upload/file/cm_lecture_09.pdf

2. The Crucial Role of Mathematics in Engineering / Prof. D. Saranya. September 12, 2023. URL: https://www.bitsathy.ac.in/the-crucial-role-of-mathematics-in-engineering/ (дата звернення: 20.05.2024).

3. Чисельні методи: навчальний посібник / Л. О. Волонтир, О. В. Зелінська, Н. А. Потапова, І. А. Чіков. Вінниця: ВНАУ. 2020 322 с.

4. Jacobian method. *Byjus.* URL: https://byjus.com/maths/jacobian-method/#:~:text=The%20Jacobi%20iterative%20method%20is,in%20for%20each%20diagonal%20element (дата звернення: 20.05.2024).

5. Iterative methods Jacobi and Gauss-Seidel. *Byjus.* URL: https://byjus.com/maths/iterative-methods-gauss-seidel-and-jacobi/ (дата звернення: 20.05.2024).