УДК 519.876.5:517.55]:574.3(043.2)

Чемес В. С., *здобувач 2 курсу спеціальності 122 Комп'ютерні науки,*
Сеник І. О., *асистент кафедри інформаційних технологій*

ВИКОРИСТАННЯ ПРОСТИХ МЕТОДІВ ТА МОДЕЛЕЙ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Вступ. Аналіз динаміки популяцій є важливим інструментом для розуміння та передбачення змін у розмірі та структурі популяцій у природних та робочих середовищах. Відомості про тенденції в рості або спаді популяцій можуть мати вирішальне значення для прийняття рішень у сферах екології, біології консервації, сільського господарства та інших галузях.

Апроксимація – це процес заміщення складного об'єкта або явища більш простим модельним представленням, яке дає змогу зменшити складність або обсяг обчислень, не втрачаючи водночас суттєвих характеристик оригіналу. У математиці та науці загалом апроксимація часто використовується в тих випадках, коли точне розв'язання задачі є недосяжним або дуже складним з обчислювального погляду [1, 2].

Виклад основного матеріалу. Для аналізу динаміки популяцій, крім простих методів апроксимації, використовуються й прості моделі. Дві з найпоширеніших моделей апроксимації – це модель Мальтуса та модель логістичного зростання.

Модель Мальтуса, названа на честь англійського економіста Томаса Мальтуса, є математичною моделлю, яка використовується для пояснення експоненційного росту популяції. Ця модель передбачає, що рівень зростання популяції пропорційний поточному розміру популяції. Інакше кажучи, чим більший розмір популяції, тим більше нових особин народжується (або приєднується до популяції) за одиницю часу.

Формула, що використовується для опису цієї моделі, має вигляд:

$$N_t = N_0 \cdot e^{rt},$$

де N_t – розмір популяції в момент часу;

N_0 – початковий розмір популяції в момент часу $t = 0$;

r – коефіцієнт росту, який визначає швидкість зміни популяції. Коли $r > 0$, популяція зростає; коли $r < 0$, популяція зменшується;

t – час, протягом якого відбувається зростання популяції;

e – число Ейлера, приблизно рівне 2.71828;

Модель Мальтуса є відносно простою та легкою у розумінні, що робить її важливим початковим інструментом для вивчення динаміки популяцій. Модель Мальтуса добре описує ситуації, де рівень зростання популяції пропорційний її поточному розміру. Це особливо корисно для пояснення ранніх стадій росту популяції, коли обмеження середовища ще не виявляються домінантними факторами.

Одним з основних недоліків моделі Мальтуса є відсутність урахування факторів, що обмежують ріст популяції, як-от доступність ресурсів, конкуренція за простір та їжу, вплив хижаків, хвороб тощо. Зважаючи на формулу моделі, можна помітити, що коефіцієнт росту r вважається постійним, що не завжди відповідає реальній ситуації, де цей коефіцієнт може змінюватися з часом через різні умови [3].

Модель логістичного зростання є математичною моделлю, яка враховує обмеження середовища та інші фактори, що впливають на зростання популяції. Порівняно з моделлю Мальтуса, яка передбачає необмежений експоненційний ріст, модель логістичного зростання враховує, що популяція не може безмежно зростати через обмежену доступність ресурсів та інші обмеження середовища.

У моделі логістичного зростання розмір популяції (N) залежно від часу (t) описується такою формулою:

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)},$$

де $P(t)$ – розмір популяції в момент часу t;

K – максимальна місткість середовища (тобто максимальний розмір популяції, який середовище може підтримувати);

P_0 – початковий розмір популяції;

r – межа, до якої може зростати популяція, відома як ємність середовища або максимальна популяція, за якою стабілізується ріст;

t – час, протягом якого відбувається зростання популяції;

e – число Ейлера, приблизно рівне 2.71828 [4];

Розглянемо приклад. Уявімо, що ми досліджуємо популяцію кролів на острові. Дано початкову кількість кролів $(P0) = 50$. Через 6 місяців $(t = 6)$ кількість кролів $(P(6)) = 150$, а через 12 місяців $(t = 12)$ кількість кролів $(P(12)) = 300$.

Необхідно знайти максимальну ємність середовища (K), швидкість зростання популяції (r) та кількість популяції через два роки $(P(24))$.

Для розв'язання використовуємо метод найменших квадратів для знаходження параметрів K та r, які мінімізують суму квадратів різниць між фактичними значеннями популяції та значеннями, отриманими за допомогою логістичної функції.

Виконувавши розрахунки, отримаємо такі результати: $K \approx 450, r \approx 0.231$.

Використовуючи формулу логістичного зростання, утворюємо нову таблицю з даними, які вказують на кількість кролів у кожен місяць, та графік, який показує зростання (табл. 1, рис. 1).

Таблиця 1 – Кількість кролів у кожен місяць

t	$N(t)$
0	50
1	61,22519
2	74,50111
3	89,9894
4	107,7735
5	127,8242
6	149,9706
7	173,8831
8	199,0784

t	$N(t)$
9	224,9503
10	250,8235
11	276,0227
12	299,9411
13	322,095
14	342,1541
15	359,947
16	375,444
17	388,7281

t	$N(t)$
18	399,9607
19	409,3495
20	417,1215
21	423,5037
22	428,7103
23	432,935
24	436,3481

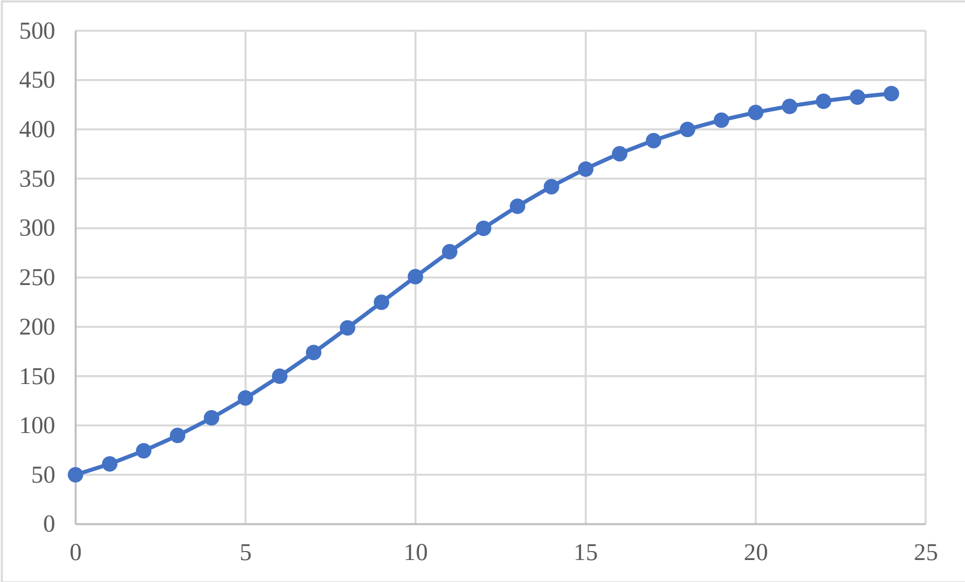

Рис. 1. Модель логістичного зростання

Висновки. Аналіз динаміки популяцій є важливим для розуміння та передбачення змін у розмірі та структурі популяцій у природних та робочих середовищах. Апроксимація, процес заміщення складних моделей простішими, як – от модель Мальтуса та модель логістичного зростання, допомагає спростити аналіз, зберігаючи водночас суттєві характеристики оригіналу. Ці моделі дають змогу передбачати тенденції в рості або спаді популяцій, враховуючи обмеження середовища та інші фактори.

Список використаних джерел

1. Approximation and Estimation. *StudySmarter*. URL: https://www.studysmarter.co.uk/explanations/math/pure-maths/approximation-and-estimation/ (дата звернення: 15.05.2024).

2. Linear and Quadratic Approximation. *CoCalc*. URL: https://cocalc.com/share/public_paths/a2c4095c79cfd0ff50a71047808a7a565dae2933 (дата звернення: 15.05.2024).

3. Wenner J. M. Teaching Exponential Growth and Decay. Geology Department, University of Wisconsin-Oshkosh. *Serc*. 09.01.2006. URL: https://serc.carleton.edu/quantskills/methods/quantlit/expGandD.html (дата звернення: 16.05.2024).

4. Exponential & logistic growth. *KhanAcademy*. URL: https://www.khanacademy.org/science/ap-biology/ecology-ap/population-ecology-ap/a/exponential-logistic-growth (дата звернення: 17.05.2024).